

Diseño asistido por computadora de controladores PID estabilizantes

Cristina Verde¹, Rolando Carrera¹, and Shankar Bhattacharyya²

¹ Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México
verde@servidor.unam.mx

² Texas A&M University, College Station

Resumen Considerando las condiciones, recientemente reportadas por Keel et al., de los controladores PID estabilizantes en términos de la respuesta frecuencial de la planta para sistemas SISO, se describe un algoritmo para generar la familia de PID estabilizantes. La clave del procedimiento es la obtención de un polinomio auxiliar que permite aplicar el teorema de Hermite-Biehler para obtener el cambio neto de fase de éste y que además permite separar el ajuste de la ganancia proporcional del controlador de las otras dos: integral y derivativa. El procedimiento se presenta a manera de algoritmo y es usado en un ejemplo para generar la familia de PID para un sistema hidráulico, suponiendo conocida su respuesta frecuencial alrededor de un punto de funcionamiento. Este diseño permitió asimilar y familiarizarse con el método y actualmente se encuentra en construcción un paquete genérico asistido por computadora, en ambiente MATLAB, para generar los controladores estabilizantes de plantas en donde se conoce solamente su comportamiento en un cierto intervalo de frecuencias

Financiado por la Universidad Nacional Autónoma de México, IN-112208 DGAPA.

1 Introducción

La mayor parte de los métodos conocidos para diseñar controladores tienen como base el modelo de la planta, obtenido éste por métodos de identificación o ecuaciones constitutivas. Por ejemplo, la ventaja del LQR [4] es que garantiza, al mismo tiempo, estabilidad y optimalidad; pero tiene la desventaja de que con frecuencia es necesario usar técnicas de identificación para producir el modelo de la planta y que el controlador resultante es de orden grande. Esto último, para aplicaciones industriales, es un impedimento para su realización, debido a la carga de computo requerido y a la necesidad de esquemas con pocos parámetros de ajuste. Con el objetivo de obtener controladores susceptibles de ser usados en la industria, es necesario que estos sean de orden bajo.

El control clásico, que toma como base la teoría desarrollada por Nyquist [7] y Bode [2], tiene la sencillez de ser un diseño gráfico que modifica la respuesta en frecuencia de lazo abierto con un simple compensador en cascada, logrando con ello márgenes de estabilidad prescritos para lazo cerrado.

*M.A. Moreno, C.A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 137-146*

Por otro lado se ha demostrado que los controladores PID tienen un rol muy importante en la industria [1] y tienen un vasto campo de aplicación que puede ser en sistemas eléctricos, hidráulicos, fluidicos, y neumáticos. Recientemente ha aparecido una gran cantidad de diversos métodos de diseño de controladores PID [6].

En uno de sus trabajos más recientes, Keel y Bhattacharyya [5] demuestran que el diseño de controladores, con al menos tres términos, puede ser realizado directamente de mediciones de respuesta en frecuencia en la planta, sin tener que construir un modelo en el espacio de estados o función de transferencia. Esta realización del controlador no requiere explícitamente del conocimiento del orden del sistema ni de la cantidad de polos o ceros en el LHP (semiplano izquierdo, por sus siglas en inglés) o en el RHP (semiplano derecho, ídem), ni es necesaria una identificación de la planta. En el caso de controladores PID, la solución especifica una banda de frecuencia donde la respuesta debe ser conocida de manera precisa, y fuera de ella basta con datos o mediciones aproximadas. Además, el método propuesto es válido para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI, ídem), estables o inestables.

Es común que, para plantas estables, los datos de respuesta en frecuencia se obtengan de mediciones directas; entonces la teoría propuesta puede ser aplicada a plantas estables sin tener que construir su modelo. Para plantas inestables, los datos de respuesta en frecuencia pueden ser obtenidos si se tiene un compensador en la retroalimentación que estabiliza la planta. Con el método propuesto por Keel et al se sintetiza el conjunto completo de controladores PID que garantizan estabilidad, que es la base para lograr múltiples especificaciones de desempeño; así, diferentes objetivos de desempeño pueden ser intersectados para satisfacer todos ellos de manera simultánea. Los cálculos requeridos para ello implican programación lineal o solución de ecuaciones lineales sujetas al barrido de un parámetro. Para satisfacer de manera simultánea múltiples criterios de desempeño se requiere la solución simultánea de un conjunto considerable de desigualdades lineales.

El objetivo de este trabajo es familiarizarse con la propuesta de Keel, asociada al cálculo de la familia de controladores que estabilizan una planta cuya información disponible es su respuesta en frecuencia, para con ello desarrollar un programa de diseño asistido por computadora (CAD, ídem) que permita ajustar controladores PID de manera iterativa.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta la teoría del método de diseño de la familia de controladores PID estabilizantes para una planta estable descrita por su respuesta en frecuencia. El algoritmo de diseño de esa familia de controladores es presentado en la sección 4. Posteriormente, sección 5, se aplica el algoritmo a una planta hidráulica, para finalmente, sección 6, presentar los puntos o conclusiones sobresalientes que surgieron durante el desarrollo de este trabajo.

2 Preliminares

El teorema de Hermite-Biehler establece que un polinomio real $\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2)$ de grado n es Hurwitz estable si y sólo si los ceros de su parte par $\delta_e(-\omega^2)$ e impar $\delta_o(-\omega^2)$ son:

1. Reales y distintos,
2. Los no negativos satisfacen la propiedad de intercalamiento

$$0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} \dots$$

y los dos coeficientes de mayor orden de $\delta(s)$ tienen el mismo signo.

Por otro lado, considerando que un polinomio Hurwitz tiene la propiedad monotónica de fase, es más simple, en algunos casos, verificar si es Hurwitz a través de su gráfica, la cual debe moverse contra reloj a través de n cuadrantes, cuando se incrementa la frecuencia de 0 a ω . Esta propiedad y la extensión al caso de funciones racionales está detrás del siguiente trabajo, dado que considera se conoce solamente el comportamiento frecuencial de la planta [3].

Considere una función racional

$$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

con $N(s)$ y $D(s)$ polinomios con coeficientes reales de orden m y n y sin ceros en el eje $j\omega$. Denote las parejas de números de ceros y polos de $R(s)$ en el lado derecho e izquierdo del plano s respectivamente por

$$[z_R^+ \ z_R^-], \quad [p_R^+ \ p_R^-],$$

entonces se puede demostrar que el número neto de cambios en fase de $R(j\omega)$ cuando la frecuencia se barre desde 0 hasta ∞ está dada por

$$\Delta_0^\infty \angle R(j\omega) = \frac{\pi}{2}(z_R^- - z_R^+ - (p_R^- - p_R^+)),$$

este incremento en fase puede expresarse en términos de lo que se conoce como firma Hurwitz de $R(s)$

$$\sigma(R) \triangleq z_R^- - z_R^+ - (p_R^- - p_R^+), \quad (1)$$

y dado que $R(s)$ no tiene polos ni ceros en el eje $j\omega$, resulta que

$$\Delta_0^\infty \angle R(j\omega) = \frac{\pi}{2}\sigma(R).$$

Adicionalmente, se ha demostrado que la firma $\sigma(R)$ puede expresarse en términos de la parte real e imaginaria de $R(j\omega) = R_r(\omega) + jR_i(\omega)$ en un conjunto

de frecuencias $\Omega = \{0, \omega_1, \omega_2, \dots, \infty\}$, sin conocer la ubicación de los polos y ceros de $R(s)$. Las relaciones resultantes se reducen a

$$\sigma(R) = \left(\operatorname{sgn}(R_r(\omega_0)) + 2 \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \operatorname{sgn}(R_r(\omega_k)) + (-1)^l \operatorname{sgn}(R_r(\omega_l)) \right) \cdot (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}(R_i(\omega_l))$$

para $n - m$ par y

$$\sigma(R) = \left(\operatorname{sgn}(R_r(\omega_0)) + 2 \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \operatorname{sgn}(R_r(\omega_k)) \right) (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}(R_i(\omega_l))$$

para $n - m$ impar, donde la serie de frecuencias

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots \omega_l = \infty^-$$

corresponden a los ceros reales finitos no negativos de multiplicidad impar de $R_i(\omega)$ [3].

3 Caracterización de PID estabilizantes

Con base en los resultados anteriores, el objetivo ahora es determinar la condición que debe tener la función racional asociada al sistema con un PID en lazo cerrado para garantizar la estabilidad usando la firma Hurwitz de un racional.

Considere el esquema de la Fig. 1 y sea $P(s)$ la función de transferencia de la planta sin polos y ceros en el eje $j\omega$ con grado relativo $r = n_P - m_P$ y cuyos ceros y polos en el lado derecho del plano complejo se denotan por $[z_P^+, p_P^+]$ y en el izquierdo $[z_P^-, p_P^-]$ respectivamente. Entonces la firma de la planta está dada

$$\sigma(P) = (z_P^- - z_P^+) - (p_P^- - p_P^+) = -r - 2(z_P^+ - p_P^+) \quad (2)$$

y cuando P es estable, la firma se reduce a $\sigma(P) = -r - 2z_P^+$.

Entonces, cuando se tiene la respuesta en frecuencia de la planta

$$P(j\omega) = P_r(\omega) + jP_i(\omega)$$

se puede obtener el grado relativo a partir de la pendiente de la magnitud en altas frecuencias, la firma de la planta a partir del defasamiento neto de $\omega = 0$ hasta ∞ , y determinar el número de ceros inestables de $P(s)$, a pesar de no conocer la función de transferencia.

Sea la estructura del controlador

$$C(s) = K_p + \frac{K_d s}{1 + sT} + \frac{K_i}{s},$$

entonces, la estabilidad del sistema de control es equivalente a la ausencia de ceros en el lado derecho del plano complejo de la función racional

$$F(s) = s(1 + sT) + (K_i + K_p s + K_d s^2)P(s). \quad (3)$$

En terminos de la firma de Hurwitz la condición de estabilidad de la familia de PID estabilizantes se reduce a:

$$\sigma(F) = (z_F^- - z_F^+) - (p_F^- - p_F^+)$$

con $p_F^- = p_F^+$; $p_F^+ = p_F^+$; $z_F^+ = 0$; $z_F^- = n+2$, y por tanto $\sigma(F) = n+2 - (p_F^- - p_F^+)$.

Con objeto de simplificar la búsqueda de los intervalos de los parámetros de los PID estabilizantes y separar el ajuste de la parte proporcional de las otras dos, se propone una función auxiliar.

Lemma 1. Sea la función auxiliar $\bar{F}(s) \triangleq F(s)P(-s)$, entonces la condición de estabilidad del lazo retroalimentado con el PID es equivalente a que la firma Hurwitz de la función auxiliar $\bar{F}(s)$ sea

$$\sigma(\bar{F}(s)) = n - m + 2z^+ + 2 \quad (4)$$

Además, se puede demostrar que la parte real de $\bar{F}(j\omega)$, tomando valores reales de ω , depende de los parámetros asociados a la parte integral y derivativa. Por el contrario la parte imaginaria solamente depende de la ganancia proporcional [5]. Es decir

$$\begin{aligned} \bar{F}(j\omega) &= (K_i - K_d\omega^2) |P(j\omega)|^2 - \omega^2 TP_r(\omega) + \omega P_i(\omega) + \\ &\quad j\omega \left(K_p |P(j\omega)|^2 + P_r(\omega) + \omega TP_i(\omega) \right) \\ &= \bar{F}_r(\omega, K_i, K_d) + j\bar{F}_i(\omega, K_p) \end{aligned}$$

y por tanto, las condiciones de estabilidad se han reducido a la firma de $\sigma(\bar{F})$ y su cálculo se puede hacer separando los valores de frecuencia $\omega_1 < \omega_2 < \dots$ que satisfacen la condición $\bar{F}_i(\omega, K_p) = 0$, y requiriendo que $\bar{F}_r(\omega, K_i, K_d) \neq 0$ para el mismo conjunto de frecuencias $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \infty$.

Resumiendo se debe buscar el conjunto de frecuencias Ω reales para cada K_p que simultáneamente satisfacen la firma 4 y que $\bar{F}_i(j\omega, K_p) = 0$.

Para la verificación del valor de la firma $\sigma(\bar{F}(s))$ se hace uso de

$$\begin{aligned} [i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{i-1}2i_{i-1} + (-1)^{i_l}i_l](-1)^{l-1}j &= n - m + 2z^+ + 2 \\ [i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{i-1}2i_{i-1}](-1)^{l-1}j &= n - m + 2z^+ + 2 \end{aligned}$$

demostradas en [3] con el conjunto de caracteres $I = \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$ con $i_k = \{+1, -1\}$.

El procedimiento para el caso de plantas inestables requiere conocer un controlador auxiliar estabilizante $C_a(s)$ el cual permite generar la respuesta frecuencial y determinar la tripleta $\{n, m, z^+\}$, y por razones de espacio es omitido.

4 Algoritmo

El siguiente procedimiento calcula el conjunto completo de ganancias de la familia de PID que estabilizan la planta $P(s)$, bajo el esquema descrito en la figura 1 suponiendo que la planta no contiene ni polos ni ceros en el eje imaginario.

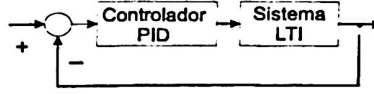


Fig. 1. Sistema con retroalimentación unitaria y un controlador PID

1. **Para sistemas estables:** Los datos disponibles son la respuesta en frecuencia de la planta $P(j\omega)$, i.e. $|P(j\omega)|$ y $\angle P(j\omega)$.

- (a) Con la pendiente de alta frecuencia del Bode de magnitud de $P(j\omega)$ determine el grado relativo (r_P) de la planta

$$r_P = n - m = -\frac{1}{20} \cdot \frac{dP_{dB}(\omega)}{d(\log_{10} \omega)} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \quad (5)$$

donde $P_{dB}(\omega) \triangleq 20 \log_{10} |P(j\omega)|$.

- (b) Con $\Delta_0^\infty[\phi(\omega)]$ denote el cambio neto en fase de $P(j\omega)$ para $\omega \in [0, \infty)$. Determine el número de ceros de la planta en el semiplano derecho (z^+) a partir de

$$\Delta_0^\infty[\phi(\omega)] = -[(n - m) + 2z^+] \frac{\pi}{2}$$

expresión obtenida a partir de la firma (Hurwitz) de la planta,

$$\sigma(P) = -(n - m) - 2(z^+ - p^+),$$

con $p^+ = 0$, polos de la planta en el RHP.

- (c) Ir al paso 2

1. **Para sistemas inestables:** Los datos disponibles son la función de transferencia de un controlador estabilizante $D(s)$ y la respuesta en frecuencia correspondiente del sistema estable en lazo cerrado $G(j\omega)$.

- (a) Calcule el Bode de magnitud y fase ($|P(j\omega)|$, $\angle P(j\omega)$) de la planta con

$$P(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{D(j\omega)(1 - G(j\omega))}$$

- (b) Determine el grado relativo de la planta r_P a partir de la pendiente de alta frecuencia del Bode de magnitud de $P(j\omega)$, ecuación (5).
(c) Determine los ceros en el SPD (z_D^+) y el grado relativo (r_D) de $D(s)$.
(d) Calcule la firma $G(s)$ con

$$\sigma(G) = \frac{\pi}{2} \Delta_0^\infty \angle G(j\omega).$$

(e) Calcule z^+ usando

$$z^+ = \frac{1}{2}[-\tau_P - \tau_D - 2z_D^+ - \sigma(G)].$$

(f) Ir al paso 2

2. Calcule $g(j\omega)$ usando

$$g(j\omega) \triangleq -\frac{\cos \phi(\omega) + \omega T \sin \phi(\omega)}{|P(j\omega)|}$$

con los datos del inciso (1), donde $\phi(\omega) = \angle P(j\omega)$.

3. Para $K_p = g(j\omega)$, fije $K_p = K_p^*$ y resuelva

$$K_p^* = -\frac{\cos \phi(\omega) + \omega T \sin \phi(\omega)}{|P(j\omega)|}, \quad (6)$$

defina $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ las distintas frecuencias con multiplicidades impar que son soluciones de la ecuación anterior.

4. Elija $\omega_0 = 0$, $\omega_l = \infty$ y $j \triangleq \text{sgn} \bar{F}_i(\infty^-, K_p^*)$.

5. Determine todas las series de enteros $i_t \in \{+1, -1\}$ tales que:

(a) Para $n - m$ par:

$$[i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{i-1} 2i_{l-1} + (-1)^l i_l](-1)^{l-1} j = n - m + 2z^+ + 2. \quad (7)$$

(b) Para $n - m$ impar:

$$[i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{i-1} 2i_{l-1}](-1)^{l-1} j = n - m + 2z^+ + 2. \quad (8)$$

6. Para la $K_p = K_p^*$ escogida en el paso 3, obtenga los valores (K_i, K_d) estabilizantes con la siguiente expresión

$$\left[\frac{\omega_t \sin \phi(\omega_t) - \omega_t^2 T \cos \phi(\omega_t)}{|P(j\omega_t)|} - K_d \omega_t^2 + K_i \right] i_t > 0$$

para $t = 0, 1, \dots, l$.

7. Repita los pasos previos variando K_p . El rango en el cual K_p puede tomar valores, está determinado por los requerimientos en que (7) u (8) se satisface para al menos una serie de enteros, como lo establece el paso 3 (solución de 6) que genera el siguiente rango

$$K_p \in (K_p^{\min}, K_p^{\max})$$

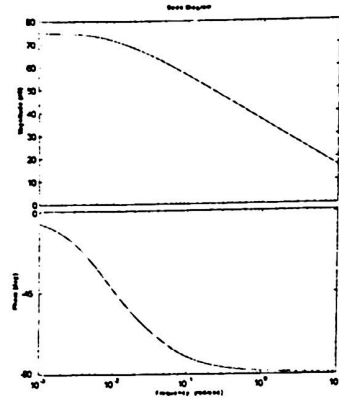
donde

$$K_p^{\min} \triangleq \min_{\omega \in \underline{\omega}} g(\omega), \quad K_p^{\max} \triangleq \max_{\omega \in \underline{\omega}} g(\omega)$$

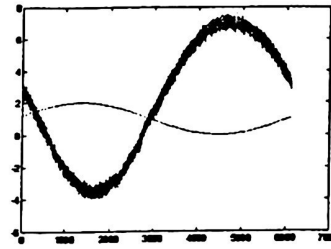
y $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_{l-1})$.

5 Ejemplo Ilustrativo

Para ilustrar el procedimiento se ha tomado la respuesta en frecuencia de un sistema hidráulico, formado por dos tanques interconectados. Los datos son muestreados con diferentes periodos de muestreo y la respectiva gráfica de Bode se presenta a continuación: a nivel de ejemplo la siguiente figura corresponde a las señales senoidales de entrada y salida para $f = 0.001Hz$.



Respuesta en frecuencia del sistema hidráulico



Registro de un punto de la respuesta en frecuencia del sistema hidráulico.

El comportamiento frecuencial y el hecho de ser una planta estable corresponde a la información requerida para el cálculo de la familia de controladores PID estabilizantes de la planta. Considerando que la pendiente de la magnitud de la gráfica a altas frecuencias es -20 db/dec se tiene entonces que $n - m = 1$. Por otro lado, como el cambio total de la fase es $-\pi/2 \text{ rad}$ y la planta es estable $p^+ = 0$ y de la ecuación (2) se tiene que la planta no tiene ceros en el lado derecho del plano complejo es decir $z^+ = 0$. Así, la firma de la función auxiliar que garantiza la estabilidad está dada por

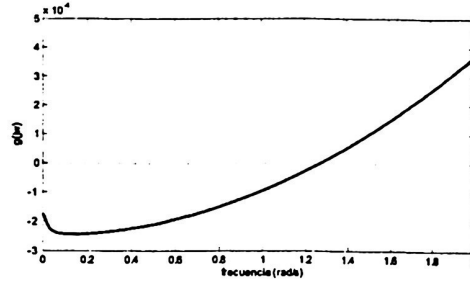
$$\sigma(\bar{F}(s)) = n - m + 2 = 3$$

Dado que $n - m$ es impar la cadena de enteros candidato se obtiene de

$$[i_0 - 2i_1 + 2i_2 - \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}] (-1)^{l-1}j = 3 \quad (9)$$

donde

$$j = \text{sgn} [\bar{F}_i(\infty^-, K_p)] = -\text{sgn} \left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} g(\omega) \right)$$

Fig. 2. Gráfica de la función $g(\omega)$ para ω de 0 a 2 rad/s

con

$$g(\omega) = -\frac{\cos \phi(\omega) + \omega T \sin \phi(\omega)}{|P(j\omega)|}$$

De la forma de $g(\omega)$ presentada en la figura 2 se observa que ésta tiene cuando mucho dos raíces reales si se permiten valores negativos de K_p y una para $K_p > -1.7e - 4$ independientemente de los valores de K_i y K_d . Además $j = -1$ y por tanto la cadena mínima de caracteres que satisface (9) es:

$$\mathcal{F} = \{i_o, i_1\} = \{+1, -1\}$$

con $l = 2$. Esta condición significa que K_p debe ser elegida tal que $\bar{F}_i(\omega_1, K_p^*) = 0$ tenga una raíz real positiva y corresponde con la intersección de $g(\omega)$ y el valor del término proporcional. Así fijando la ganancia se calcula la frecuencia ω_1 y el conjunto de frecuencias

$$\Omega = \{\omega_0 = 0, \omega_1, \omega_2 = \infty\}$$

junto con la desigualdad

$$\left(K_i - K_d \omega_t^2 + \frac{-\omega_t^2 T \cos \phi(\omega_t) + \omega_t \sin \phi(\omega_t)}{|P(j\omega_t)|} \right) i_t > 0$$

genera el espacio del conjunto estabilizante (K_i, K_d) .

En particular se reducen a las condiciones

$$K_i > 0$$

$$K_i - K_d \omega_1^2 < \frac{\omega_1^2 T \cos \phi(\omega_1) - \omega_1 \sin \phi(\omega_1)}{|P(j\omega_1)|}$$

para cada valor de K_p seleccionado. La Fig. 3 muestra la región de valores de los parámetros de la parte integral y derivativa para los valores de $K_p \in \{0, 0.001, 0.004\}$ y $10 < K_i < 0$. Se omite el barrido completo de la ganancia por motivos de visualización.

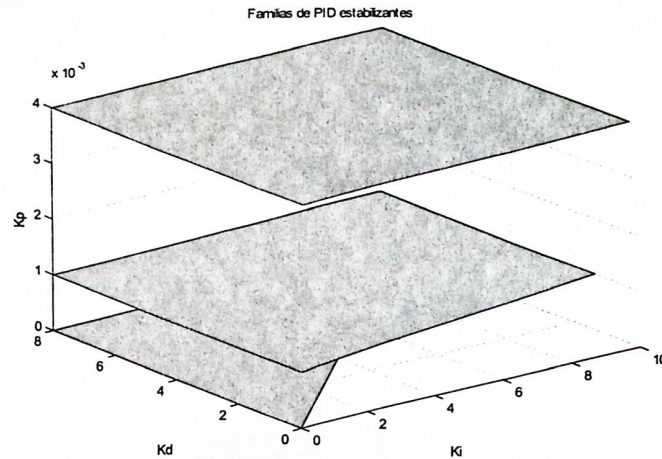


Fig. 3. Región de valores de K_i y K_d para $K_p \in \{0, 0.001, 0.004\}$

6 Conclusiones

Considerando las condiciones de los PID estabilizantes para una planta SISO, de la cual solamente se conoce su respuesta en frecuencia, se deriva un algoritmo para generar toda la familia de controladores. Este algoritmo se aplica al caso de un sistema hidráulico de dos tanques. La asimilación de la propuesta reportada recientemente permitió sentar las bases para la realización de un paquete CAD que se encuentra en construcción.

Referencias

1. Åström, K., Hägglund. PID Controllers: Theory, Design and Tuning, 2nd ed. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, USA, (1995)
2. Bode, H. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand, Princeton, N.J. 81945)
3. Datta, A., Ho, M. and Bhattacharyya, S. Advances in Industrial Control Structures and Synthesis of PID Controller. Springer Verlag, N.Y., USA (2000)
4. Kalman, R. Contribution to the theory of optimal control. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (1960)
5. Keel, L. and Bhattacharyya, S. Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, en prensa.
6. Li, Y., Ang, K. and Chong, G. PID Control System Analysis and Design. IEEE Control Systems Magazine, **26** (2006) 32-41
7. Nyquist, H. Regulation theory. Bell System Technical Journal, **11** (1932) 126-147